

① با حروف کلمه «Lighter» چند کلمه هفت حرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان نوشت به شرطی که بین دو حرف g و h دقیقاً یک حرف وجود داشته باشد؟

۱۴۴۰ (۴)

۱۲۰۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بسته‌ای به صورت $g-h$ در نظر می‌گیریم. توجه کنید که دو حرف g و h می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. برای حرف بین آن‌ها نیز ۵ حالت خواهیم داشت. حال این بسته و ۴ حرف دیگر را ۵ شیء متمایز در نظر می‌گیریم. در نتیجه:

$$۱۲۰۰ = ۵! \times ۲! \times ۵$$

حرف بین جابه‌جایی جایگشت کلی
h, g h, g

② با استفاده از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت به‌طوری که در آنها ارقام ۱ و ۵ کنار هم باشند ولی ارقام ۳ و ۲ کنار هم نیاشند؟

۹۶ (۴)

۵۴ (۳)

۱۳۶ (۲)

۱۴۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

تعداد حالت‌هایی را که ارقام ۱ و ۵ کنار هم باشند را تعیین می‌کنیم.

$$۲۴۰ = ۵! \times ۲! \Rightarrow ۲, ۳, ۴, ۶ \text{ و } ۱, ۵$$

توجه داشته باشید از بین این حالت‌هایی که حساب کردیم بعضی از آنها قابل قبول نیستند زیرا در بعضی از آنها ۲ و ۳ کنار هم هستند پس تعداد آن حالت‌ها را حساب کرده و از ۲۴۰ کم کنیم.

$$۱۴۴ = ۲۴۰ - ۹۶ \Rightarrow ۴! \times ۲! \times ۲! = ۹۶ \Rightarrow ۴, ۶ \text{ و } ۲, ۳ \text{ و } ۱, ۵$$

۳) با ارقام ۰، ۱، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه رقمی زوج می‌توان ساخت؟

۳۰ (۱)

۳۵ (۲)

۳۶ (۳)

۳۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا اعداد زوج با دو رقم ۱ را می‌سازیم:

۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۴

حال با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴، اعداد سه رقمی زوج می‌سازیم.

حالت ۱: اگر یکان صفر باشد:

$$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{1} = 12$$

حالت ۲: اگر یکان ۲ یا ۴ باشد:

$$\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{2} = 18$$

$$33 = 18 + 12 + 3 = \text{تعداد کل عددهای مطلوب}$$

۴) در یک همایش قرار است ۶ نفر که ۳ نفر آنها لیلا، مریم و سوسن هستند، سخنرانی کنند. به چند طریق می‌توانیم برنامه این سخنرانی‌ها را تنظیم کنیم، به طوری که سخنرانی لیلا بعد از سخنرانی مریم (نه لزوماً بلافاصله) و همچنین سخنرانی سوسن بعد از سخنرانی لیلا (نه لزوماً بلافاصله) باشد؟

۶۰ (۱)

۹۰ (۲)

۱۸۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۴»

تعداد کل حالت‌های ممکن برای تنظیم برنامه این سخنرانی‌ها ۶! است؛ ترتیب سخنرانی لیلا، مریم و سوسن بدون در نظر گرفتن بقیه افراد ۳! حالت دارد که فقط یکی از آنها با شرایط مسأله تطابق دارد. (مریم قبل از لیلا و لیلا قبل از سوسن)؛ بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$6! \times \frac{1}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

۵) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت به نحوی که ارقام آن از بزرگ به کوچک یا از کوچک به بزرگ چیده شده باشند؟

۵ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا از میان این پنج رقم، سه رقم را انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{5}{3} = 10$ حالت امکان‌پذیر است. که دو حالت چیدمان برای سه عدد انتخاب شده وجود دارد تا ارقام، نزولی یا صعودی باشد، پس جواب سوال، برابر است با: $2 \times 10 = 20$.

۶) با ارقام ۱، ۳، ۴، ۵، ۷ و ۸ چند عدد چهاررقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت که حتماً شامل رقم ۵ باشد؟

۲۴۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

از بین ارقام ۱، ۳، ۴، ۷، ۸ سه رقم را انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{5}{3}$ حالت امکان‌پذیر است، سه رقم انتخاب شده در کنار ۵، به $4!$ جایگشت دارند، پس جواب سوال برابر است با: $\binom{5}{3} \times 4! = 10 \times 24 = 240$.

۷) در یک کشور، نوعی اتومبیل در ۴ رنگ (زرد، سبز، سفید و مشکی)، ۳ مدل و ۵ حجم موتور مختلف و دو نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود. چند نوع از این اتومبیل با رنگ سفید یا مشکی و با دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

۱۵ (۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای رنگ‌ها، دو حالت (سفید یا مشکی) انتخاب داریم. برای مدل ۳ حالت، برای حجم موتور ۵ حالت و برای دنده تنها یک حالت (اتوماتیک) انتخاب داریم. بنابراین:

$$30 = 1 \times 5 \times 3 \times 2 = \text{تعداد کل حالات}$$

۸) در چند عدد طبیعی سه رقمی، ارقام تکراری وجود دارد؟

۵۰۴ (۱)

۶۴۸ (۲)

۲۴۰ (۳)

۲۵۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به اصل ضرب، تعداد کل عددهای سه رقمی برابر است با:

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

و تعداد عددهای سه رقمی بدون رقم تکراری برابر است با:

$$9 \times 9 \times 8 = 648$$

پس در $252 = 900 - 648$ عدد سه رقمی، ارقام تکراری وجود دارد.

۹) حاصل $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 16 \times 18$ چند برابر $10!$ است؟

۶/۲۵ (۱)

۲/۵۱ (۲)

۸/۱۲ (۳)

۴/۱۰۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$2 \times 4 \times \dots \times 16 \times 18$$

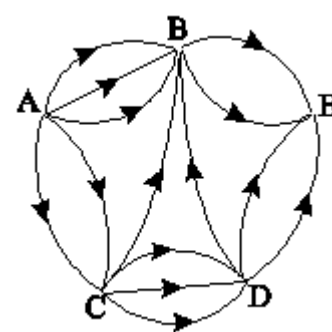
$$= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times 8) \times (2 \times 9)$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 8 \times 9)$$

$$= 2^9 \times 9! = 2^9 \times \frac{10!}{10} = \frac{2^9}{10} \times 10!$$

پس عبارت مورد نظر، $\frac{2^9}{10} = \frac{512}{10} = 51/2$ برابر $10!$ است.

۱۰) در شکل زیر همه جاده‌ها یک‌طرفه هستند. چند مسیر از شهر A به شهر E وجود دارد؟



۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۰ (۳)

۳۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

به چهار روش ABE، ACDE، ACBE و ACDBE می‌توان از A به E رسید. حال تعداد مسیرهای متناظر با هر کدام را حساب می‌کنیم:

$$ABE : 3 \times 2 = 6$$

$$ACDE : 2 \times 3 \times 2 = 12$$

$$ACBE : 2 \times 1 \times 2 = 4$$

$$ACDBE : 2 \times 3 \times 1 \times 2 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها} = 6 + 12 + 4 + 12 = 34$$

۱۱) چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه $B = \{4, 5, 6, 7\}$ می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(4, 4)$ باشد؟

۲۵۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

۱۲۵ (۲)

۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع f به صورت $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, 4), (5, d)\}$ است که a, b, c و d هر کدام می‌توانند یکی از اعداد ۴، ۵، ۶ و ۷ باشند، یعنی هر کدام ۴ حالت دارند؛ بنابراین تعداد توابعی مانند f برابر است با:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

(۱۲) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۶ رقمی مضرب ۵ بین ۲۰۰،۰۰۰ و ۴۰۰،۰۰۰ با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

(۱) ۴۸

(۲) ۷۲

(۳) ۹۶

(۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم رقم یکان مضرب‌های ۵، باید صفر یا پنج (۰ یا ۵) باشد پس دو حالت داریم:

حالت اول:

(۲ یا ۳)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \downarrow & & & & & 5 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$$

حالت دوم:

(۲ یا ۳)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \downarrow & & & & & 0 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$$

$$48 + 48 = 96: \text{پس تعداد کل حالات}$$

(۱۳) در چند عدد سه رقمی فقط یک رقم ۶ وجود دارد؟

(۱) ۲۴۳

(۲) ۲۵۰

(۳) ۲۲۵

(۴) ۲۱۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

رقم ۶ ممکن است رقم یکان، دهگان یا صدگان باشد، پس سه حالت امکان‌پذیر است:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{6} \times \frac{9}{1} \times \frac{9}{1} = 81 \\ \uparrow \\ 6 \end{array}$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{9}{1} = 72 \\ \uparrow \\ 6$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{9}{1} \times \frac{1}{6} = 72 \\ \uparrow \\ 6$$

پس تعداد اعداد مطلوب، برابر با $81 + 72 + 72 = 225$ است.

۱۴) با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۳، ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۱۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰

۲) ۲۸

۳) ۴۰

۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

اگر صدگان ۳ باشد، دو حالت به‌وجود می‌آید:

$$\frac{\boxed{۳}}{۱} \times \frac{\boxed{۱}}{۱} \times \frac{\boxed{۵۷}}{۲} = ۲$$

$$\frac{\boxed{۳}}{۱} \times \frac{\boxed{۱}}{۱} \times \frac{\boxed{۵۷}}{۲} = ۲$$

اگر صدگان بزرگتر از ۳ باشد:

$$\frac{\boxed{۵۷}}{۲} \times \frac{\boxed{\text{مابقی ارقام}}}{۴ \times ۳} = ۲۴$$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲۴ + ۶ + ۲ = ۳۲$$

۱۵) می‌خواهیم با استفاده از سه رنگ سبز و قرمز و سفید، خانه‌های شکل زیر را رنگ کنیم. این کار به چند حالت ممکن است به شرطی که حتماً از هر سه رنگ استفاده کنیم و خانه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند؟

--	--	--	--	--

۴۲ (۲)

۳۶ (۱)

۵۴ (۴)

۴۸ (۳)

پاسخ: **گزینه ۲**

گزینه «۲»

ابتدا تعداد کل حالت‌ها را بدون در نظر گرفتن این شرط که حتماً باید از هر سه رنگ استفاده کنیم به دست می‌آوریم:

--	--	--	--	--

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

در این ۴۸ حالت، حالت‌هایی وجود دارد که فقط از ۲ رنگ استفاده شده است. پس باید تعداد این حالت‌ها را پیدا کنیم و از ۴۸ کم کنیم.

تعداد حالت‌هایی که فقط از ۲ رنگ استفاده شده:

(سبز = G ، قرمز = R و سفید = W)

G	R	G	R	G
R	G	R	G	R

G	W	G	W	G
W	G	W	G	W

R	W	R	W	R
W	R	W	R	W

پس تعداد این حالت‌های نامطلوب برابر با ۶ است.

$$\Rightarrow 48 - 6 = 42 = \text{تعداد حالت های مطلوب}$$

۱۶) با حروف کلمه «شهربازی» چند کلمه ۵ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که حرف اول آن نقطه‌دار نباشد؟

۱۶۸۰ (۴)

۱۴۴۰ (۳)

۲۱۶۰ (۲)

۱۰۸۰ (۱)

پاسخ: **گزینه ۱**

گزینه «۱»

در حروف کلمه «شهربازی»، حرف‌های «ه»، «ر» و «ا» اگر در ابتدا قرار گیرند، بدون نقطه خواهند بود (دقت کنید که اگر حرف «ی» در ابتدا قرار گیرد به صورت «ی_» و نقطه‌دار می‌شود).

پس به ۳ حالت می‌توان اولین خانه سمت راست را پر کرد:

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 3 = 1080$$

۱۷) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت به نحوی که ترتیب ارقام در آن از کوچک به بزرگ یا از بزرگ به کوچک باشد؟

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

ابتدا سه رقم را انتخاب می‌کنیم که دو حالت چیدمان برای این اعداد وجود دارد.

ترتیب ارقام آن از بزرگ به کوچک یا از کوچک به بزرگ باشد.

$$\binom{5}{3} \times 2 = 10 \times 2 = 20$$

۱۸) چند جایگشت کلمه «ghomi» با حروف صدادار شروع و به حرف بی‌صدا ختم می‌شود؟

۳۲ (۱)

۳۶ (۲)

۴۸ (۳)

۷۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

برای حرف اول ۲ انتخاب از میان حروف صدادار «i و o» داریم.

برای حرف آخر ۳ انتخاب از میان حروف بی‌صدای «g, h, m» داریم:

برای ۳ حرف وسط نیز ۳ حرف باقی‌مانده را استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{2}_{\text{حرف اول}} \times \underbrace{3}_{\text{حرف آخر}} \times \underbrace{2}_{\text{حرف اول}} \times \underbrace{1}_{\text{حرف آخر}} \times \underbrace{3}_{\text{حرف آخر}} = 36$$

۱۹) ۱۰ پسر می‌خواهند بسکتبال بازی کنند. به چند روش می‌توانیم آن‌ها را به دو تیم پنج نفره تقسیم کنیم، اگر مهدی بخواهد هم‌تیمی پدرام باشد و پرهام نخواهد در تیم داریوش باشد؟

۱۵ (۱)

۲۰ (۲)

۲۵ (۳)

۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

مهدی هم‌تیمی پدرام است. از بین پرهام و داریوش یکی باید هم‌تیمی مهدی و پدرام باشد و دیگری نباشد. پس ۲ انتخاب داریم. تا اینجا ۳ نفر از اعضای تیم مشخص شده‌اند. ۲ نفر عضو دیگر این تیم باید از بین ۶ بازیکن باقی‌مانده انتخاب شوند. یک تیم که تکمیل شود، تیم دیگر خودبه‌خود تکمیل خواهد شد. پس تعداد حالت‌های ممکن برابر است

$$\text{با: } 2 \times \binom{6}{2} = 2 \times \frac{6 \times 5}{2} = 30$$

۲۰) به چند طریق مختلف می‌توان ۲۰ مسافر یک اتوبوس را در ۱۰ ایستگاه، بدون هیچ محدودیتی پیاده کرد؟ (همه مسافران پیاده خواهند شد.)

۲۰! (۴)

۱۰! (۳)

۱۰^{۲۰} (۲)

۲۰^{۱۰} (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

هر مسافر برای پیاده شدن، ۱۰ حق انتخاب دارد چون ۲۰ مسافر داریم، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{20 \text{ بار}} = 10^{20}$$

۲۱) چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک‌بار تکرار شده باشد؟

۵۸۳۲۰ (۴)

۳۶۵۰۰ (۳)

۳۷۵۱۲ (۲)

۵۲۴۸۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا تعداد کل اعداد پنج‌رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{9}{1} \frac{10}{1} \frac{10}{1} \frac{10}{1} \frac{10}{1} = 90000$$

سپس تعداد اعداد ۵ رقمی فاقد رقم ۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{8}{1} \frac{9}{1} \frac{9}{1} \frac{9}{1} \frac{9}{1} = 52488$$

در نتیجه تعداد اعداد ۵ رقمی که در آن عدد ۳ حداقل یک‌بار تکرار شده باشد، برابر است با:

$$90000 - 52488 = 37512$$

(۲۲) با استفاده از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت، به طوری که ارقام ۱ و ۵ کنار هم قرار گیرند و ارقام ۲ و ۳ کنار هم نیاشند؟

۲۴۰ (۴)

۵۴ (۳)

۱۳۶ (۲)

۱۴۴ (۱)

پاسخ: **گزینه ۱**

گزینه «۱»

اول تعداد حالت‌هایی که ۱ و ۵ کنار هم باشند را تعیین می‌کنیم:

$$\boxed{1,5}, 2, 3, 4, 6 \Rightarrow 5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

توجه داشته باشید از بین این حالت‌هایی که حساب کردیم، بعضی از آن‌ها قابل قبول نیستند، زیرا در بعضی از آن‌ها ۲ و ۳ کنار هم هستند، پس تعداد آن حالت‌ها را حساب کرده و از ۲۴۰ کم کنیم:

$$\boxed{1,5}, \boxed{2,3}, 4, 6 \Rightarrow 4! \times 2! \times 2! = 96$$

در نتیجه جواب مسئله برابر است با: $240 - 96 = 144$

(۲۳) چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت، به طوری که رقم یکان و دهگان آن از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و رقم صدگان آن از مجموعه $B = \{4, 5, 6\}$ باشد؟

۱۸ (۴)

۳۶ (۳)

۳۰ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: **گزینه ۲**

گزینه «۲»

$$\begin{array}{ccc} \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} \\ \hline & \underbrace{\{1, 2, 3, 4\}} & \downarrow \\ & & \{4, 5, 6\} \end{array}$$

با توجه به اینکه عدد ۴ در هر دو مجموعه A و B حضور دارد، برای ساخت عدد سه رقمی با ارقام متمایز، باید مسئله را حالت‌بندی کنیم و در نهایت طبق اصل جمع، حالت‌ها را با هم جمع کنیم:

حالت اول: عدد ۴ در یکان یا دهگان قرار گیرد که با توجه به متمایز بودن ارقام، دیگر صدگان نمی‌تواند عدد ۴ را داشته باشد:

$$\text{عدد ۴ در یکان باشد: } \frac{2}{\{5, 6\}} \times \frac{3}{\{1, 2, 3\}} \times \frac{1}{\{4\}} = 6$$

$$\text{عدد ۴ در دهگان باشد: } \frac{2}{\{5, 6\}} \times \frac{1}{\{4\}} \times \frac{3}{\{1, 2, 3\}} = 6$$

حالت دوم: عدد ۴ بتواند در صدگان قرار گیرد که در این صورت با توجه به متمایز بودن ارقام، عدد ۴ در یکان و دهگان نمی‌تواند جایگاهی داشته باشد:

$$\frac{3}{\{4, 5, 6\}} \times \underbrace{\frac{3}{\{1, 2, 3\}} \times \frac{2}{\{4\}}}_{= 18} = 18$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات مطلوب} = 6 + 6 + 18 = 30$$

۲۴) چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که «یکان > دهگان $\geq$ صدگان» باشد؟

۹۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۴۵ (۳)

۱۶۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای حل سؤال دو حالت در نظر می‌گیریم. اول اینکه «یکان < دهگان = صدگان» برای ساختن چنین عددی کافی است که ۲ رقم متمایز مانند $\{a, b\}$ از $\{0, 1, \dots, 9\}$ انتخاب کنیم و رقم بزرگتر را به صدگان نسبت دهیم، رقم کوچکتر را به یکان. پس در این حالت $\binom{10}{2} = 45$ عدد داریم.

در حالت دوم «یکان < دهگان < صدگان». در این حالت باید ۳ رقم متمایز انتخاب کنیم و رقم بزرگتر را به صدگان، رقم متوسط را به دهگان و رقم کوچکتر را به یکان نسبت دهیم. یعنی $\binom{10}{3} = 120$ حالت مختلف.

در نتیجه $165 = 120 + 45$ عدد با این ویژگی وجود دارند.

۲۵) با ارقام ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد زوج چهار رقمی کوچکتر از ۳۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۵۴ (۱)

۶۰ (۲)

۷۲ (۳)

۴۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در رقم یکان باید از ارقام صفر و ۲ و ۴ استفاده کنیم و در رقم هزارگان از ارقام ۱ و ۲ استفاده کنیم. پس دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $\frac{1}{\text{فقط } 1} \times \frac{4}{\text{فقط } 2} \times \frac{3}{\text{فقط } 4} \times \frac{1}{\text{فقط } 1} = 12$

حالت دوم: $\frac{2}{\downarrow 1,2} \times \frac{4}{\downarrow 4,0} \times \frac{3}{\downarrow 4,0} \times \frac{2}{\downarrow 4,0} = 48$

اصل جمع
 $\rightarrow 12 + 48 = 60$

۲۶) چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در آن هیچ دو رقم مجاوری مثل هم نباشند؟

۵۷۶ (۲)

۷۲۹ (۴)

۵۰۴ (۱)

۶۴۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای رقم صدگان، هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد ولی برای رقم دهگان، رقم استفاده شده در صدگان را نمی‌توان به کار برد، در حالی که رقم صفر به انتخاب‌ها افزوده می‌شود، پس ۹ انتخاب برای این رقم وجود دارد. برای رقم یکان نیز هر یک از ۹ رقم متفاوت با رقم دهگان را می‌توان استفاده کرد، پس تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$$9 \times 9 \times 9 = 729$$

۲۷) در چند عدد سه‌رقمی، رقم ۷ وجود دارد؟

۲۸۲ (۲)

۹۰۰ (۴)

۲۵۲ (۱)

۶۴۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$900 = 9 \times 10 \times 10 = \text{تعداد اعداد سه رقمی}$$

$$648 = 8 \times 9 \times 9 = \text{تعداد اعداد سه رقمی که ۷ ندارند}$$

بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی‌ای که شامل رقم ۷ باشند، برابر است با:

$$900 - 648 = 252$$

۲۸) با ارقام ۱، ۳، ۴، ۶ و ۷، چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۶۰۰ می‌توان ساخت به‌طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۱۲۰ (۴)

۷۲ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای انتخاب صدگان از بین ۳ رقم ۱، ۳ و ۴، باید یک رقم انتخاب شود تا عدد کوچک‌تر از ۶۰۰ باشد. سپس برای دهگان از ۴ رقم باقی‌مانده و برای یکان نیز از بین ۳ رقم باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$$3 \times 4 \times 3 = 36$$

۲۹) یک رمز از ۳ کاراکتر تشکیل شده است که شامل حروف الفبای انگلیسی و ارقام صفر تا ۹ می‌باشد. اگر در این رمز، امکان کنار هم قرار دادن دو حرف یا دو رقم وجود نداشته باشد، چند رمز قابل تولید است؟

۹۳۶۰ (۴)

۸۶۴۰ (۳)

۷۸۴۰ (۲)

۶۷۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

دو حالت برای ایجاد چنین رمزی وجود دارد:

(الف)

$$\frac{\text{حرف}}{\text{رقم}} \times \frac{\text{حرف}}{\text{رقم}} \times \frac{\text{حرف}}{\text{رقم}} = ۶۷۶۰$$

(ب)

$$\frac{\text{رقم}}{\text{حرف}} \times \frac{\text{حرف}}{\text{رقم}} \times \frac{\text{رقم}}{\text{حرف}} = ۲۶۰۰$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد رمزهای قابل تولید برابر است با:

$$۶۷۶۰ + ۲۶۰۰ = ۹۳۶۰$$

۳۰) با ارقام ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که بزرگتر از ۳۰۰۰ باشد؟

۹۶ (۴)

۸۲ (۳)

۷۸ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} \frac{۲}{۵,۳} \times \frac{۴}{۴} \times \frac{۳}{۳} \times \frac{۱}{۴} = ۲۴ \\ \frac{۳}{۵,۴,۳} \times \frac{۴}{۴} \times \frac{۳}{۳} \times \frac{۲}{۲} = ۷۲ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۲۴ + ۷۲ = ۹۶$$

۳۱) چهار کتاب شیمی متفاوت، سه کتاب ریاضی متفاوت و ۲ کتاب فیزیک متفاوت به چند طریق کنار هم در یک قفسه قرار می‌گیرند، به طوری که کتاب‌های ریاضی کنار هم و در دو طرف آن کتاب‌های فیزیک باشند؟

۹۶۰ (۴)

۴۸۰ (۳)

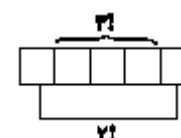
۱۴۴۰ (۲)

۷۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

سه کتاب ریاضی و دو کتاب فیزیک را یک بسته در نظر می‌گیریم که ابتدا و انتهای این بسته کتاب‌های فیزیک هستند.



سپس این بسته را با ۴ چهار کتاب شیمی جایگشت می‌دهیم:

$$۱۴۴۰ = ۱۲۰ \times ۲ \times ۶ = ۵! \times ۲! \times ۳! = \text{تعداد حالت‌ها}$$

۳۲) از بین سال‌های شمسی تا به امروز (از سال ۱ شمسی تا سال ۱۳۹۹ شمسی) چند سال وجود دارد که عدد سال بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۲۸۰ (۴)

۲۷۹ (۳)

۲۷۸ (۲)

۲۷۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

منظور، آن دسته از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۳۹۹ هستند که یکانشان صفر یا ۵ باشد.

یک رقمی فقط سال ۵: ۱ حالت

$$\text{دو رقمی: حالت } ۱۸ = ۹ \times \frac{۲}{\{۰,۵\}}$$

$$\text{سه رقمی: حالت } ۱۸۰ = ۹ \times ۱۰ \times \frac{۲}{\{۰,۵\}}$$

$$\text{چهار رقمی: حالت } ۸۰ = \frac{۱}{\text{فقط } ۱} \times \frac{۴}{\{۰,۱,۲,۳\}} \times ۱۰ \times \frac{۲}{\{۰,۵\}}$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۱ + ۱۸ + ۱۸۰ + ۸۰ = ۲۷۹$$

۳۳) قطاری ۶ واگن دارد. به چند طریق می‌توان واگن‌ها را با ۴ رنگ مختلف، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که واگن‌های مجاور هم‌رنگ نباشند؟

(۴) ۱۷۲۸

(۳) ۷۲۰

(۲) ۹۷۲

(۱) ۱۰۲۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای رنگ کردن واگن اول یکی از چهار رنگ را استفاده می‌کنیم. واگن دوم نباید هم‌رنگ واگن اول باشد، پس یکی از ۳ رنگ متمایز از رنگ واگن اول را انتخاب می‌کنیم و به همین ترتیب واگن‌های بعدی را رنگ می‌کنیم:

$$\frac{4}{\text{اول}} \times \frac{3}{\text{دوم}} \times \frac{3}{\text{سوم}} \times \frac{3}{\text{چهارم}} \times \frac{3}{\text{پنجم}} \times \frac{3}{\text{ششم}} \\ = 4 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972$$

۳۴) به چند طریق می‌توان ۱۰ کارت به رنگ‌های متمایز را درون ۱۰ جعبه متمایز قرار داد به‌طوری که فقط یکی از جعبه‌ها خالی بماند؟

(۴) $10! \times 10$

(۳) $10! \times 144$

(۲) $10! \times 45$

(۱) $10!$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و کنار می‌گذاریم (جعبه‌ای که باید خالی بماند) که این کار به

$$\binom{10}{1} = \frac{10!}{1! \times 9!} = 10 \text{ طریق امکان‌پذیر است.}$$

سپس از بین ۹ جعبه باقیمانده، یک جعبه انتخاب می‌کنیم که قرار است درون آن دو کارت قرار دهیم، انتخاب جعبه به

$$\binom{9}{1} = \frac{9!}{1! \times 8!} = 9 \text{ طریق امکان‌پذیر است.}$$

سپس دو کارت از بین ۱۰ کارت را انتخاب کرده تا در جعبه‌ای که در مرحله قبل انتخاب کرده‌ایم، قرار دهیم و این کار به

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45 \text{ طریق امکان‌پذیر است.}$$

حال ۸ کارت باقی می‌ماند و ۸ جعبه خالی که به ۸! طریق می‌توان کارت‌های باقیمانده را درون آن‌ها قرار داد.

بنابراین طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$10 \times 9 \times 45 \times 8! = \underbrace{10 \times 9 \times 8!}_{10!} \times 45 = 10! \times 45$$

۳۵) شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۶ نفره از میان ۱۰ نفر دوست خود ترتیب دهد. اگر ۲ نفر از این ۱۰ نفر نخواهند با هم به این مهمانی بیایند، انتخاب مهمان‌ها به چند حالت صورت می‌گیرد؟

۱۱۲ (۲)

۵۶ (۱)

۸۴ (۴)

۱۴۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

این دو نفر را A و B می‌نامیم. تعداد انتخاب‌هایی که A و B هیچ‌کدام شرکت ندارند، برابر است با:

$$C(8, 6) = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

تعداد انتخاب‌هایی نیز که فقط یکی از افراد A و B حضور دارند برابر است با: $2 \times C(8, 5) = 2 \times \frac{8!}{3!5!} = 2 \times 56 = 112$

$$112 + 28 = 140$$

جواب نهایی برابر است با:

۳۶) رمز قفل یک کیف رم‌دار، از سه رقم تشکیل شده است. اگر بدانیم رقم سمت راست فرد است و رقم وسط کوچک‌تر از ۴ نیست، در بدترین حالت باید چند رمز را امتحان کنیم تا کیف باز شود؟

۲۵۰ (۲)

۲۲۵ (۱)

۳۰۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای رقم سمت چپ ۱۰ حالت (۰, ۱, ..., ۹) امکان‌پذیر است.

برای رقم وسط ۶ حالت (۴, ۵, ..., ۹) امکان‌پذیر است.

برای رقم سمت راست ۵ حالت (۱, ۳, ۵, ۷, ۹) امکان‌پذیر است.

پس طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با: $10 \times 6 \times 5 = 300$

۳۷) هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده‌اند. به تصادف سه تا از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل، مضرب ۶ است؟

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{15} \quad (1)$$

$$\frac{3}{15} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$n(S) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

عددی مضرب ۶ است که هم زوج باشد و هم مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد. در چهار حالت زیر مجموع سه عدد انتخاب شده مضرب ۳ است. در هر یک از این چهار حالت، تعداد عددهای زوج را می‌یابیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3 \xrightarrow{\text{زوج‌ها}} 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ 1, 3, 5 \xrightarrow{\text{زوج‌ها}} 0 \\ 2, 3, 4 \xrightarrow{\text{زوج‌ها}} 2 \times 1 \times 2 = 4 \\ 3, 4, 5 \xrightarrow{\text{زوج‌ها}} 2 \times 1 \times 1 = 2 \end{array} \right.$$

$$n(A) = 2 + 4 + 2 = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

۳۸) می‌خواهیم ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را طوری کنار هم قرار دهیم که بین ۱ و ۳ حداقل یک رقم دیگر وجود داشته باشد. تعداد حالات ممکن کدام است؟

$$84 \quad (4)$$

$$120 \quad (3)$$

$$90 \quad (2)$$

$$72 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

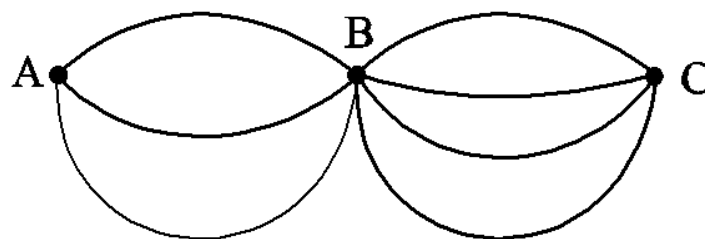
گزینه «۱»

کل حالات ممکن ۵! است. حال، حالت‌هایی که ۱ و ۳ کنار هم هستند و رقمی بین آن‌ها وجود ندارد را حساب می‌کنیم.

$$\boxed{13} \quad \underline{2} \quad \underline{4} \quad \underline{5} \Rightarrow 2 \times 4!$$

$$5! - (2 \times 4!) = 5 \times 4! - 2 \times 4! = 3 \times 4! = 72$$

(۳۹) از شهر A به شهر B، ۳ مسیر و از شهر B به شهر C، ۴ مسیر مختلف وجود دارد. به چند طریق ممکن است شخصی از شهر A به شهر C برود و سپس به شهر A برگردد در حالی که در مسیر رفت و برگشت از مسیر تکراری عبور نکند؟



(۲) ۳۶

(۴) ۲۴

(۱) ۷۲

(۳) ۴۸

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

در مسیر رفت ۳×۴ مسیر وجود دارد. در مسیر برگشت چون یک مسیر از C به B قبلاً استفاده شده است، پس ۳ مسیر و از شهر B به شهر A، ۲ مسیر قابل انتخاب است. $۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$

(۴۰) یک آزمون تستی شامل ۱۰ سوال ۳ گزینه‌ای و ۵ سوال دو گزینه‌ای (بلی - خیر) می‌باشد و فردی قصد دارد به صورت تصادفی به سؤال‌ها جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟ (به هر سؤال نمی‌توان بیش‌تر از یک پاسخ داد.)

(۴) $۴^{۱۰} \times ۳^۵$

(۳) $۴^۸ \times ۳^۵$

(۲) $۵^۳ \times ۱۰^۴$

(۱) $۴^۵ \times ۳^{۱۰}$

پاسخ: گزینه ۴

برای هر سؤال سه گزینه‌ای ۴ انتخاب و برای هر سؤال دو گزینه‌ای ۳ انتخاب داریم پس:

$$\text{تعداد روش های ممکن} = \underbrace{(۴ \times \dots \times ۴)}_{\text{هرتبه}} \times \underbrace{(۳ \times \dots \times ۳)}_{\text{هرتبه}} = ۴^{۱۰} \times ۳^۵$$

(۴۱) با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج کوچکتر از ۴۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۳۶

(۲) ۴۲

(۳) ۳۴

(۴) ۳۸

پاسخ: گزینه ۳

برای هزارگان عدد سه حالت وجود دارد:

$$\text{الف) هزارگان } ۲ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = ۱۲$$

(ابتدا هزارگان و سپس یکان را انتخاب می‌کنیم.)

$$\text{ب) هزارگان } ۳ = \frac{1}{3} \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = ۱۸$$

$$\text{پ) هزارگان } ۴ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = ۴$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $۱۲ + ۱۸ + ۴ = ۳۴$

(۴۲) سه سکه متمایز را پرتاب می‌کنیم. اگر تعداد «رو»ها بیشتر باشد، یک تاس می‌اندازیم و در غیر این صورت یک سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۲۸

(۳) ۳۲

(۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۳

در پرتاب سه سکه ۸ حالت رخ می‌دهد:

تاس → ر ر ر
تاس → پ ر ر
تاس → ر پ ر
سکه → پ پ ر
تاس → ر ر پ
سکه → پ ر پ
سکه → ر پ پ
سکه → پ پ پ

در چهار حالت تعداد «رو»ها بیشتر است که تاس می‌اندازیم و در ۴ حالت سکه می‌اندازیم. از آنجا که در پرتاب هر تاس ۶ حالت و در پرتاب هر سکه دو حالت داریم، تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$۶ \times ۴ + ۲ \times ۴ = ۲۴ + ۸ = ۳۲$$

۴۳) چند تابع می‌توان از مجموعه $A = \{۴, ۵, ۶\}$ به مجموعه $B = \{۷, ۸\}$ نوشت به طوری که تابع همانی یا ثابت نباشند؟

- (۱) ۸
(۳) ۶
(۲) ۵
(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

اعضای مجموعه A را به عنوان مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تابع قرار می‌دهیم. برای مؤلفه دوم هر زوج مرتب، ۲ حالت (۷ یا ۸) داریم، پس:

$$۸ = ۲ \times ۲ \times ۲: \text{طبق اصل ضرب } f = \{(۴, ۷), (۵, ۷), (۶, ۷)\}$$

تابع f همانی نمی‌تواند باشد ولی در دو حالت زیر ثابت است:

$$\begin{cases} f = \{(۴, ۷), (۵, ۷), (۶, ۷)\} \\ f = \{(۴, ۸), (۵, ۸), (۶, ۸)\} \end{cases}$$

پس تعداد کل تابع‌های مطلوب برابر با $۶ = ۸ - ۲$ است.

۴۴) می‌خواهیم با حروف صدا دار انگلیسی جدول زیر را به گونه‌ای پُر کنیم که حروف هیچ دو خانه مجاوری تکراری نباشد، به چند طریق این کار ممکن است؟ (در زبان انگلیسی ۵ حرف صدا دار داریم.)

--	--	--	--	--	--

- (۱) ۵۱۲۰
(۲) ۳۲۴۰
(۳) ۴۰۹۶
(۴) ۶۰۲۰

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم حروف صدا دار انگلیسی ۵ تا هستند:

$\{a, o, e, i, u\}$

در خانه اول (برای مثال از سمت چپ) به ۵ حالت حرف صدا دار می‌تواند قرار گیرد. در خانه بعد به جز حرفی که در خانه اول قرار گرفته، ۴ حرف دیگر می‌تواند قرار گیرد و به همین ترتیب برای هر یک از خانه‌های بعدی هم ۴ حالت داریم.

$$\boxed{۵} \boxed{۴} \boxed{۴} \boxed{۴} \boxed{۴} \boxed{۴} \Rightarrow ۵ \times ۴^۵ = ۵ \times ۱۰۲۴ = ۵۱۲۰$$

۴۵) یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم و در ادامه به اندازه عدد رو شده، مجدداً تاس می‌اندازیم. مجموع تمام اعداد رو شده تاس‌های این فرایند، چند عدد طبیعی متفاوت می‌تواند باشد؟

۴۱ (۴)

۴۲ (۳)

۴۰ (۲)

۳۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

روش اول: براساس اولین تاس رو شده، مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم.

توجه داریم حداقل مجموع زمانی رخ می‌دهد که در همه تاس‌های پرتاب شده عدد ۱ و حداکثر مجموع زمانی رخ می‌دهد که در همه تاس‌های پرتاب شده، عدد ۶ ظاهر شود.

$$\{2, \dots, 7\} = \text{مجموع کل} \Rightarrow \{1, \dots, 6\} = \text{مجموع تاس‌های بعدی} \Rightarrow 1 = \text{تاس اول}$$

$$\{4, \dots, 14\} = \text{مجموع کل} \Rightarrow \{2, \dots, 12\} = \text{مجموع تاس‌های بعدی} \Rightarrow 2 = \text{تاس اول}$$

.

$$\{12, \dots, 42\} = \text{مجموع کل} \Rightarrow \{6, \dots, 36\} = \text{مجموع تاس‌های بعدی} \Rightarrow 6 = \text{تاس اول}$$

که اگر از تمام این مجموعه‌ها اجتماع بگیریم به مجموعه $\{2, \dots, 42\}$ می‌رسیم که شامل ۴۱ عدد است.

روش دوم: کمترین مجموع موقعی به دست می‌آید که تاس ۱ آمده و تاس بعدی هم ۱ بیاید، پس عدد ۲ کمترین مقدار مجموع است.

بیشترین مقدار مجموع هم موقعی است که تاس اول ۶ آمده و هرکدام از ۶ تاس بعدی هم ۶ باشد یعنی $7 \times 6 = 42$. بیشترین مقدار مجموع است. در نتیجه اعداد تاس‌های رو شده، ۴۱ عدد طبیعی متفاوت می‌تواند باشد.

۴۶) با ارقام ۸، ۶، ۴، ۲، ۰ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که حداقل دو رقم آن تکراری باشد؟

۶۵ (۴)

۵۲ (۳)

۴۸ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا تعداد کل اعداد سه‌رقمی را که می‌توان نوشت، به دست آورده و سپس تعداد اعداد سه‌رقمی بدون ارقام تکراری را از آن کم می‌کنیم تا به مطلوب مسئله برسیم:

$$4 \times 5 \times 5 - 4 \times 4 \times 3 = 52$$

۴۷) ۵ نفر می‌خواهند سوار یک خودروی سواری (۲ نفر جلو، ۳ نفر پشت) شوند و مسیری را توسط آن پیمایش کنند. اگر فقط ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند، این کار به چند حالت مختلف صورت می‌گیرد؟

۹۶ (۴)

۷۲ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای انتخاب راننده، ۳ حالت داریم، برای سایر صندلی‌ها به ترتیب ۲، ۳، ۴ و ۱ حالت وجود دارد.

راننده
↓

۳ ۴ ۳ ۲ ۱

اصل ضرب
→ $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$

۴۸) با استفاده از ارقام ۰ و ۱ و ۲ چند عدد طبیعی که حداقل ۲ رقمی و حداکثر ۴ رقمی باشند، می‌توان نوشت؟

۶۸ (۴)

۷۲ (۳)

۷۸ (۲)

۸۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۲ رقمی: $\frac{3}{\text{یکان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} = 6$

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۳ رقمی: $\frac{3}{\text{یکان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{صدگان}} = 18$

تعداد حالت‌های نوشتن عدد ۴ رقمی: $\frac{3}{\text{یکان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{هزارگان}} = 54$

حالا طبق اصل جمع باید اعداد حاصل را با هم جمع کنیم:

$$6 + 18 + 54 = 78$$

۴۹) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۲ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر کدام از افراد، حداقل یک کتاب برسد؟

۳۰ (۴)

۲۳ (۳)

۲۵ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اگر هیچ شرطی نداشتیم، می‌گفتیم هر کتاب ۲ حالت دارد پس در کل طبق اصل ضرب $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ حالت داریم که از این ۳۲ حالت، ۲ حالت یعنی حالت‌هایی که کل کتاب‌ها به یک نفر رسیده است، قابل قبول نیست.

۵۰) قطاری با ۵۰ مسافر که ۲۰ نفر آن‌ها خانم هستند، در ۵ ایستگاه توقف می‌کند، به چند طریق می‌توانند این مسافرها پیاده شوند؟ (ایستگاه پنجم، ایستگاه آخر است. در انتها قطار باید به حالت تخلیه کامل باشد و در این ۵ ایستگاه مسافر جدیدی سوار نمی‌شود.)

(۴) $5^{20} + 5^{30}$

(۳) $20^5 \times 30^5$

(۲) 5^{50}

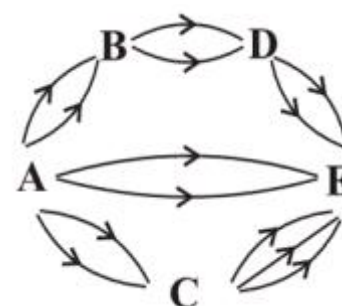
(۱) 5^{50}

پاسخ: گزینه ۲

مسافر اول ۵ حق انتخاب، دوم ۵ حق انتخاب و به همین صورت هر کدام از آن‌ها ۵ حق انتخاب دارند.

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5}_{50 \text{ مسافر}} = 5^{50}$$

۵۱) به چند طریق می‌توان از مسیرهای یک طرفه زیر از شهر A به شهر E رفت؟



(۱) ۱۴

(۲) ۱۶

(۳) ۲۰

(۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۲

برای رفتن از شهر A به شهر E حالت‌های زیر مفروض است:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \rightarrow BD \rightarrow DE \\ 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{l} AE \\ 2 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left\{ \begin{array}{l} AC \rightarrow CE \\ 2 \times 3 = 6 \end{array} \right.$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$8 + 2 + 6 = 16$$

۵۲) با اعداد ۷، ۶، ۵، ۳، ۲ و ۰، چند عدد سه رقمی (بدون تکرار) می‌توان نوشت که حتماً عدد ۶ در آن‌ها وجود داشته باشد؟

۴۸ (۲)

۱۰۰ (۱)

۳۲ (۴)

۵۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی (بدون تکرار) را نوشته و سپس اعدادی را که عدد شش در آن‌ها وجود ندارد، می‌نویسیم پس تفاضل دو عدد به‌دست آمده برابر است با تعداد اعداد سه رقمی (بدون تکرار ارقام) که شامل عدد ۶ می‌باشند.

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی بدون ۶} = \boxed{4}\boxed{4}\boxed{3} = 48$$

$$\text{تعداد کل اعداد سه رقمی} = \boxed{5}\boxed{5}\boxed{4} = 100$$

$$100 - 48 = 52 = \text{تعداد اعداد سه رقمی شامل ۶}$$

۵۳) چند عدد ۴ رقمی شامل تنها یک رقم ۲ و یک رقم ۳ موجود است، به‌طوری‌که رقم ۲ قبل از رقم ۳ آمده باشد؟

۳۶۰ (۴)

۳۰۴ (۳)

۱۹۲ (۲)

۲۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) ۲ در جایگاه هزارگان بیاید. در این صورت برای انتخاب جای رقم ۳، سه حالت داریم و برای ۲ جایگاه دیگر هر کدام ۸ حالت داریم، پس تعداد این اعداد می‌شود:

$$\underbrace{1 \times 1 \times 8 \times 8}_{\text{سه حالت برای ۳}} = 64 \rightarrow 64 \times 3 = 192$$

۲) ۲ در جایگاه صدگان بیاید. در این صورت برای رقم ۳، دو حالت و برای ۲ جایگاه دیگر به ترتیب ۷ و ۸ حالت داریم، پس این تعداد نیز برابر می‌شود با:

$$\underbrace{7 \times 1 \times 1 \times 8}_{\text{دو حالت برای ۳}} = 56 \rightarrow 56 \times 2 = 112$$

۳) ۲ در جایگاه دهگان بیاید. در این صورت برای رقم ۳، یک حالت و برای رقم‌های دیگر ۷ و ۸ حالت داریم، پس جواب برابر می‌شود با:

$$\underbrace{7 \times 8 \times 1}_{\{2\}} \times \underbrace{1}_{\{3\}} = 56$$

پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$192 + 112 + 56 = 360$$

۵۴) افشین به سه فروشگاه که از برندهای متفاوت هستند برای خرید یک جفت کفش و یک جفت جوراب مراجعه می‌کند. فروشگاه اول ۳ نوع کفش مختلف و ۴ نوع جوراب مختلف، فروشگاه دوم ۴ نوع کفش مختلف و ۲ نوع جوراب مختلف و فروشگاه سوم ۲ نوع کفش مختلف و ۳ نوع جوراب مختلف دارد. افشین به چند طریق می‌تواند از یکی از این سه برند، یک جفت کفش و یک جفت جوراب انتخاب کند؟

$$(۲) \quad ۳^۳ \times ۲^۳ \times ۴^۳$$

$$(۴) \quad ۷۲$$

$$(۱) \quad ۳^۳ \times ۲^۴ \times ۴^۳$$

$$(۳) \quad ۲۶$$

پاسخ: گزینه ۳

افشین فروشگاه اول یا دوم یا سوم را انتخاب می‌کند و در آن فروشگاه یک جفت کفش و یک جفت جوراب انتخاب می‌کند. بنابراین، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$۳ \times ۴ + ۴ \times ۲ + ۲ \times ۳ = ۱۲ + ۸ + ۶ = ۲۶$$

۵۵) چند عدد طبیعی فرد و بدون تکرار ارقام بین ۲۰۰ تا ۵۰۰۰ وجود دارد که رقم‌های اول و آخر آن‌ها مربع کامل باشند؟

$$(۴) \quad ۲۵۶$$

$$(۳) \quad ۱۹۶$$

$$(۲) \quad ۱۹۲$$

$$(۱) \quad ۱۶۶$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دو حالت زیر ممکن است:

(۱) اعداد سه رقمی طبیعی فرد و بدون تکرار ارقام بزرگ‌تر از ۲۰۰ که رقم‌های یکان، صدگان مربع کامل باشند:

$$\begin{array}{|c|} \hline ۴ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{باقیاعداد} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline ۹۱ \text{ یا } ۱۶ \\ \hline \end{array} = ۱۶ \quad \text{یا} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۹ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{باقیاعداد} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline ۱ \\ \hline \end{array} = ۸$$

(۲) اعداد چهاررقمی طبیعی فرد و بدون تکرار ارقام کوچک‌تر از ۵۰۰۰ که رقم‌های یکان و هزارگان آن‌ها مربع کامل باشند.

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{باقیاعداد} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline ۹ \\ \hline \end{array} = ۵۶ \quad \text{یا} \quad \begin{array}{|c|} \hline ۴ \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{باقیاعداد} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline ۹۱ \text{ یا } ۱۶ \\ \hline \end{array} = ۱۱۲$$

مجموع کل حالات برابر است با:

$$۱۶ + ۸ + ۵۶ + ۱۱۲ = ۱۹۲$$

۵۶) با حروف کلمه «کتاب» چند کلمه چهارحرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان ساخت که با حرف «ب» شروع شود؟

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۱۲

۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

ب
↓
۱ ۳ ۲ ۱ = ۶

۵۷) به چند طریق می‌توان با اعداد صفر تا ۹، شماره تلفن ۸ رقمی ساخت به شرطی که اولین رقم صفر نباشد؟

۱) 10^8

۲) 10×9^9

۳) 9×10^7

۴) 9^8

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

صفر نمی‌تواند اولین شماره تلفن باشد، پس اولین شماره تلفن ۹ حالت و بقیه ۱۰ حالت دارند:

$\Rightarrow 9 \times 10^7$
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
۹ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰ ۱۰

۵۸) می‌خواهیم رئوس یک مربع را با رنگ‌های آبی، قرمز و زرد رنگ کنیم؛ به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند؟

۱۲ (۲)

۲۴ (۱)

۶ (۴)

۱۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فرض کنیم می‌خواهیم رنگ آمیزی از رأس A آغاز شود؛ چون هنوز رنگی زده نشده ۳ حالت برای رنگ‌آمیزی این رأس داریم؛ اما در ادامه دو حالت پیش می‌آید:

الف) B و D نباید با A هم‌رنگ باشند اما می‌توانند با هم هم‌رنگ باشند، در حالت هم‌رنگی B و D می‌توانیم ۲ انتخاب داشته باشیم و البته C نیز ۲ انتخاب دارد تا با آن‌ها هم‌رنگ نباشد. پس داریم:

$$\underbrace{3}_{\text{رنگ A}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ D و B}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ C}} = 12$$

ب) رنگ B و D می‌توانند متفاوت باشند که در مجموع ۲ حالت برای آن وجود دارد. اما در این حالت C فقط یک انتخاب (که همان رنگ A است.) می‌تواند داشته باشد:

$$\underbrace{3}_{\text{رنگ A}} \times \underbrace{2}_{\text{رنگ D و B}} \times \underbrace{1}_{\text{رنگ C}} = 6$$

پس در مجموع ۱۸ حالت داریم.

۵۹) یک آزمون ۴ گزینه‌ای شامل ۱۵ سوال است. فردی قصد دارد که به سوال‌ها به صورت تصادفی پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۱۵^۴ (۴)

۴^{۱۵} (۳)

۱۵^۵ (۲)

۵^{۱۵} (۱)

پاسخ: گزینه ۱

هر سوال ۵ حالت خواهد داشت چرا که فرد می‌تواند سؤالات را بدون جواب هم بگذارد. بنابراین تعداد کل حالات برابر

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{15} = 5^{15} \text{ است با:}$$

۶۰) با استفاده از حروف a، b و c به چند طریق می‌توان خانه‌های زیر را پر کرد به صورتی که حروف خانه‌های مجاور یکسان نباشد؟



(۱) ۴۸

(۲) ۳۲

(۳) ۷۲

(۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۱

در خانه اول هر ۳ حرف را می‌توانیم قرار دهیم ولی در خانه‌های بعدی حرفی را که در خانه قبلی قرار دادیم نمی‌توانیم انتخاب کنیم، بنابراین ۲ حرف را می‌توانیم قرار دهیم.

$$۴۸ = ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = \text{تعداد حالات}$$